

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

SEMINAR

**Modeliranje kondenzatora na
visokim frekvencijama**

Fran Kostelac

Voditelj: *Dubravko Babić*

Zagreb, svibanj 2019.

SADRŽAJ

1. Uvod	1
2. Fosterov teorem za reaktanciju s gubicima	2
2.1. Impedancija serijskih paralelnih LC krugova tj. krugovi anti-rezonancije	2
2.2. Impedancija paralelnih serijskih LC krugova tj. krugovi rezonancije	4
3. Kako serijski otpor utječe na polove anti-rezonantnih (paralelnih) LC krugova	7
3.1. Otpor u seriju s kondenzatorom	7
3.1.1. Prepostavka: $\omega_k'^2 = \omega_k^2 (1 - \sigma_k^2)$ $\xrightarrow{\sigma_k < < 1} \omega_k' \simeq \omega_k$	8
3.1.2. Prepostavka 2: $\omega_k' = \omega_k + j\omega_k \sigma_k$	8
3.2. Otpor u seriju sa zavojnicom	9
3.2.1. Prepostavka: $\omega_k'^2 = \omega_k^2 (1 - \sigma_k^2)$ $\xrightarrow{\sigma_k < < 1} \omega_k' \simeq \omega_k$	9
3.2.2. Prepostavka 2: $\omega_k' = \omega_k + j\omega_k \sigma_k$	10
3.3. Otpor u seriju sa zavojnicom i s kondenzatorom	11
3.3.1. Prepostavka: $\omega_k'^2 = \omega_k^2 (1 - \sigma_k^2)$ $\xrightarrow{\sigma_k < < 1} \omega_k' \simeq \omega_k$	12
3.3.2. Prepostavka 2: $\omega_k' = \omega_k + j\omega_k \sigma_k$	12
4. Kako serijski otpor utječe na polove rezonantnih (serijskih) LC krugova	13
4.0.1. Prepostavka: $\omega_k'^2 = \omega_k^2 (1 - \sigma_k^2)$ $\xrightarrow{\sigma_k < < 1} \omega_k' \simeq \omega_k$	14
4.0.2. Prepostavka 2: $\omega_k' = \omega_k + j\omega_k \sigma_k$	14
5. Algoritam izlučivanja nadomjesnog modela kondenzatora iz mjerena	15
5.1. Izračun gubitaka σ_m iz s parametara	15
5.2. Algoritam	15
6. Zaključak	17

7. Literatura	18
8. Sažetak	19

1. Uvod

2. Fosterov teorem za reaktanciju s gubicima

Uvod rada. Nakon uvoda dolaze poglavlja u kojima se obrađuje tema.

2.1. Impedancija serijskih paralelnih LC krugova tj. krugovi anti-rezonancije

$$Z(s) = \frac{sL}{s^2LC + 1}, \quad (2.1a)$$

$$Z(j\omega) = \frac{j\omega L}{1 - \omega^2LC}, \quad (2.1b)$$

$$\omega_k^2 = \frac{1}{L_k C_k} \rightarrow L_k = \frac{1}{\omega_k^2 C_k} \quad (2.1c)$$

Uvrstimo (2.1c) u (2.1b) i dobijemo:

$$Z(\omega) = \sum_{k=1}^n \frac{\frac{j\omega}{\omega_k^2 C_k}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_k^2}} = \frac{1}{\prod_{l=1}^{2n-2} (p_l^2 - \omega^2)} \sum_{k=1}^n \frac{j\omega}{C_k} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{2n-2} (p_l^2 - \omega^2). \quad (2.2)$$

Fosterov teorem kaže [1]:

$$Z(\omega) = jH \frac{\prod_{l=1}^{2n-1} (\theta_l^2 - \omega^2)}{\prod_{l=1}^{2n-2} (p_l^2 - \omega^2)}, \quad (2.3)$$

gdje je

$$H = \frac{1}{\omega C_0} = \omega L_0, \quad (2.4)$$

što je nazivni kapacitet ili induktivitet elementa.

Kad izjednačimo (2.3) i (2.2) dobijemo:

$$\begin{aligned} Z(\omega) &= \frac{j}{\omega C_0} \frac{\prod_{l=1}^{2n-1} (\theta_l^2 - \omega^2)}{\prod_{l=1}^{2n-2} (p_l^2 - \omega^2)} = \frac{1}{\prod_{l=1}^{2n-2} (p_l^2 - \omega^2)} \sum_{k=1}^n \frac{j\omega}{C_k} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{2n-2} (p_l^2 - \omega^2), \\ \frac{j}{\omega C_0} \prod_{l=1}^{2n-1} (\theta_l^2 - \omega^2) &= \sum_{k=1}^n \frac{j\omega}{C_k} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{2n-2} (p_l^2 - \omega^2), \end{aligned} \quad (2.5)$$

Uzmemmo ω_m , to je anti-rezonantna frekvencija m -tog segmenta u seriji, i uvrstimo ga u (2.5) te raspišemo članove sume $\frac{1}{C_k}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega C_0} \prod_{l=1}^{2n-1} (\theta_l^2 - \omega^2) &= \frac{\omega_m^2}{C_1} \prod_{l=2}^{2n-2} (p_l^2 - \omega_m^2) + \frac{\omega_m^2}{C_2} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq 2}}^{2n-2} (p_l^2 - \omega_m^2) + \dots \\ &\quad \dots + \frac{\omega_m^2}{C_m} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq m}}^{2n-2} (p_l^2 - \omega_m^2) + \dots + \frac{\omega_m^2}{C_n} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq n}}^{2n-2} (p_l^2 - \omega_m^2) \end{aligned} \quad (2.6)$$

sve komponente osim $\frac{1}{C_m}$ će biti 0 jer sa ω_m "kratimo" pol p_m i tako nam je taj produkt 0. Stoga nam ostaje samo m -ti član i imamo :

$$\frac{1}{\omega C_0} \prod_{l=1}^{2n-1} (\theta_l^2 - \omega_m^2) = \frac{\omega_m^2}{C_m} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq m}}^{2n-2} (p_l^2 - \omega_m^2), \quad (2.7)$$

izrazimo C_m preko C_0 :

$$C_m = C_0 \omega_m^2 \frac{\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq m}}^{2n-2} (p_l^2 - \omega_m^2)}{\prod_{l=1}^{2n-1} (\theta_l^2 - \omega_m^2)}, \quad (2.8a)$$

$$L_k = \frac{1}{\omega_k^2 C_k}. \quad (2.8b)$$

Uvrstimo (2.8a) u (2.3):

$$\begin{aligned}
 Z(\omega_m) &= \frac{j\omega_m^2 \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq m}}^{2n-2} (p_l^2 - \omega_m^2) \prod_{l=1}^{2n-1} (\theta_l^2 - \omega_m^2)}{\omega_m C_m \prod_{l=1}^{2n-1} (\theta_l^2 - \omega_m^2) \prod_{l=1}^{2n-2} (p_l^2 - \omega_m^2)} \\
 &= \frac{j\omega_m^2 \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq m}}^{2n-2} (p_l^2 - \omega_m^2)}{\omega_m C_m (p_m^2 - \omega_m^2) \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq m}}^{2n-2} (p_l^2 - \omega_m^2)} \\
 &= \frac{j\omega_m^2}{\omega_m C_m (p_m^2 - \omega_m^2)} = \frac{j}{\omega_m C_m (p_m^2 - \omega_m^2)}. \tag{2.9}
 \end{aligned}$$

Prepostavimo da naš kondenzator ima gubitke tj da ima ekvivalentne serijske otpore. Neka ti otpori unose kompleksu frekvenciju $\omega_m' = \omega_m(1 + j\sigma_m)$, koja nam ne krvari značajno Q faktor pola frekvencije tj. ne smanjuje značajno rezonantnu frekvenciju ω_m jer je $\sigma_m \ll 1$. Znači ω_m' je realna frekvencija tog segmenta, nju zapravo mjerimo/vidimo na vektorskom analizatoru mreže. Uvrstimo kompleksnu frekvenciju u (2.9):

$$\begin{aligned}
 Z(\omega_m') &= -\frac{j}{\omega_m C_m \left(\underbrace{p_m^2 - \omega_m^2}_{p_m=\omega_m} - 2j\omega_m^2 \sigma_m + \omega_m^2 \sigma_m^2 \right)} \\
 &= \frac{j}{\omega_m C_m (\omega_m^2 \sigma_m^2 - j2\omega_m^2 \sigma_m)} \xrightarrow{Re(Z(\omega_m'))} -\frac{2 - \sigma_m^2}{\omega_m^3 \sigma_m C_m (4 + 5\sigma_m^2 + \sigma_m^4)} \\
 &\xrightarrow{\sigma_m \ll 1} Z(\omega_m') = -\frac{1}{2\omega_m^3 \sigma_m C_m}, \tag{2.10}
 \end{aligned}$$

2.2. Impedancija paralelnih serijskih LC krugova tj. krugovi rezonancije

Admitancija je jedne grane:

$$Y(\omega) = \frac{sC}{1 + s^2 LC}, \tag{2.11}$$

a admitancija više grana je:

$$\begin{aligned}
 Y(\omega) &= \sum_{k=1}^n \frac{sC_k}{1 + s^2 L_k C_k} = \frac{j\omega}{\prod_{l=1}^{2n-1} \left(1 - \frac{\omega^2}{\theta_l^2}\right)} \sum_{k=1}^n C_k \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{2n-2} \left(1 - \frac{\omega^2}{\theta_l^2}\right) \\
 \hookrightarrow Z(\omega) &= - \frac{j \prod_{l=1}^{2n-1} \left(1 - \frac{\omega^2}{\theta_l^2}\right)}{\omega \sum_{k=1}^n C_k \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{2n-2} \left(1 - \frac{\omega^2}{\theta_l^2}\right)}. \tag{2.12}
 \end{aligned}$$

Izjednačimo (2.12) s Fosterovim teoremom impedancije:

$$\begin{aligned}
 Z(\omega) &= \frac{j \prod_{l=1}^{2n-1} \left(1 - \frac{\omega^2}{\theta_l^2}\right)}{\omega C_0 \prod_{l=1}^{2n-2} \left(1 - \frac{\omega^2}{p_l^2}\right)} = \frac{-j \prod_{l=1}^{2n-1} \left(1 - \frac{\omega^2}{\theta_l^2}\right)}{\omega \sum_{k=1}^n C_k \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{2n-2} \left(1 - \frac{\omega^2}{\theta_l^2}\right)} \\
 &\quad - \omega C_0 \prod_{l=1}^{2n-2} \left(1 - \frac{\omega^2}{p_l^2}\right) = \omega \sum_{k=1}^n C_k \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{2n-2} \left(1 - \frac{\omega^2}{\theta_l^2}\right) \tag{2.13}
 \end{aligned}$$

Sada (2.13) raspišemo kao u (2.6) tj. uzmemmo ω_m rezonantnu frekvenciju i svi članovi osim onog uz C_m nestanu i dobijemo relaciju:

$$C_m = - C_0 \frac{\prod_{l=1}^{2n-2} \left(1 - \frac{\omega_m^2}{p_l^2}\right)}{\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq m}}^{2n-2} \left(1 - \frac{\omega_m^2}{\theta_l^2}\right)}. \tag{2.14}$$

Iz (2.14) izrazimo C_0 preko C_k , te to uvrstimo u Fosterovu relaciju iz (2.13) i pojednostavimo zapis:

$$\begin{aligned}
 Z(\omega_m) &= \frac{-j \prod_{l=1}^{2n-2} \left(1 - \frac{\omega_m^2}{p_l^2}\right) \prod_{l=1}^{2n-1} \left(1 - \frac{\omega_m^2}{\theta_l^2}\right)}{\omega_m C_m \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{2n-2} \left(1 - \frac{\omega_m^2}{\theta_l^2}\right) \prod_{l=1}^{2n-2} \left(1 - \frac{\omega_m^2}{p_l^2}\right)} \\
 &= \frac{-j \prod_{l=1}^{2n-2} \left(1 - \cancel{\frac{\omega_m^2}{p_l^2}}\right) \left(1 - \frac{\omega_m^2}{\theta_m^2}\right) \prod_{l=1}^{2n-1} \left(1 - \cancel{\frac{\omega_m^2}{\theta_l^2}}\right)}{\omega_m C_m \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{2n-2} \left(1 - \cancel{\frac{\omega_m^2}{\theta_l^2}}\right) \prod_{l=1}^{2n-2} \left(1 - \cancel{\frac{\omega_m^2}{p_l^2}}\right)} \quad (2.15) \\
 &= \frac{-j \left(1 - \frac{\omega_m^2}{\theta_m^2}\right)}{\omega_m C_m}.
 \end{aligned}$$

Opet prepostavimo da imamo kompleksnu frekvenciju $\omega_m' = \omega_m(1 + j\sigma_m)$, što je ujedno frekvencija pola θ_m i uvrstimo ju u (2.15):

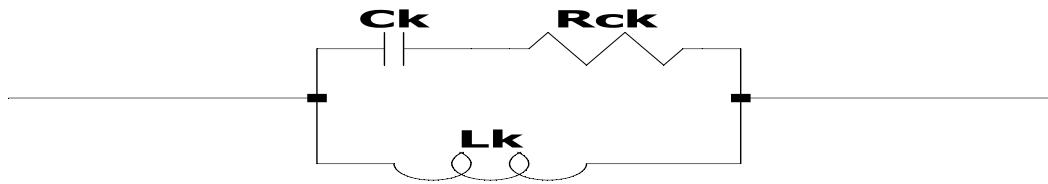
$$\begin{aligned}
 Z(\omega_m') &= - \frac{j \left(1 - \underbrace{\left(\frac{\omega_m^2}{\theta_m^2}\right)}_{=1} + 2j\sigma_m \underbrace{\left(\frac{\omega_m^2}{\theta_m^2}\right)}_{=1}\right)}{\omega_m (1 + j\sigma_m) C_m} \\
 &= - \frac{-2\sigma_m}{\omega_m (1 + j\sigma_m) C_m} \quad (2.16)
 \end{aligned}$$

Zanima nas samo realni dio impedancije stoga:

$$Z(\omega_m') = \frac{2\sigma_m}{\omega_m C_m (1 + \sigma_m^2)} \xrightarrow{\sigma_m \ll 1} Z(\omega_m') = \frac{2\sigma_m}{\omega_m C_m} \quad (2.17)$$

3. Kako serijski otpor utječe na polove anti-rezonantnih (paralelnih) LC krugova

3.1. Otpor u seriju s kondenzatorom



--- C:\Users\f_kos\Documents\LTspiceXVII\Draft1.asc ---

Slika 3.1: Serijski otpor s kondenzatorom R_{Ck}

$$Z(s) = \frac{s^2 C_k L_k R_{Ck} + s L_k}{s^2 L_k C_k + s C_k R_{Ck} + 1} \quad (3.1)$$
$$Z(\omega) = \frac{-\omega^2 C_k L_k R_{Ck} + j\omega L_k}{1 - \omega^2 L_k C_k + j\omega C_k R_{Ck}}$$

Nule impedancije:

$$s_{0_1} = 0, s_{0_2} = \frac{-1}{C_k R_{Ck}}, s_{0_3} = \infty, \quad (3.2)$$

polovi impedancije:

$$s_{p_{1,2}} = \frac{-R_{Ck}}{2L_k} \pm j\sqrt{\frac{1}{C_k L_k} - \frac{R_{Ck}^2}{4L_k^2}}, \omega_k \sigma_k = \frac{R_{Ck}}{2L_k} \rightarrow R_{Ck} = \frac{2\sigma_k}{\omega_k C_k} \quad (3.3)$$

Kada je sklop u rezonanciji samo ostane realni dio (3.1):

$$Z(\omega_k) = \frac{\omega_k^4 C_k^2 L_k^2 R_{Ck}}{\omega_k^4 C_k^2 L_k^2 + \omega_k^2 C_k^2 R_{Ck}^2 - 2\omega_k^2 C_k L_k + 1} \quad (3.4)$$

3.1.1. Pretpostavka: $\omega_k'^2 = \omega_k^2 (1 - \sigma_k^2) \xrightarrow{\sigma_k << 1} \omega_k' \simeq \omega_k$

Kad uvrstimo relaciju (2.1c) u (3.4) dobijemo sljedeći izraz:

$$Z(\omega_k') \simeq Z(\omega_k) = \frac{1}{\omega_k^2 C_k^2 R_{Ck}}, \quad (3.5)$$

te uvrstimo relaciju za R_{Ck} iz (3.3) u (3.5):

$$Z(\omega_k) = Z_{max} = \frac{1}{2\omega_k C_k \sigma_k} \quad (3.6)$$

3.1.2. Pretpostavka 2: $\omega_k' = \omega_k + j\omega_k \sigma_k$

Uvrstimo pretpostavku 2, (2.1c) i (3.3) u (3.4) i uzmemmo realni dio dobivene impedan-

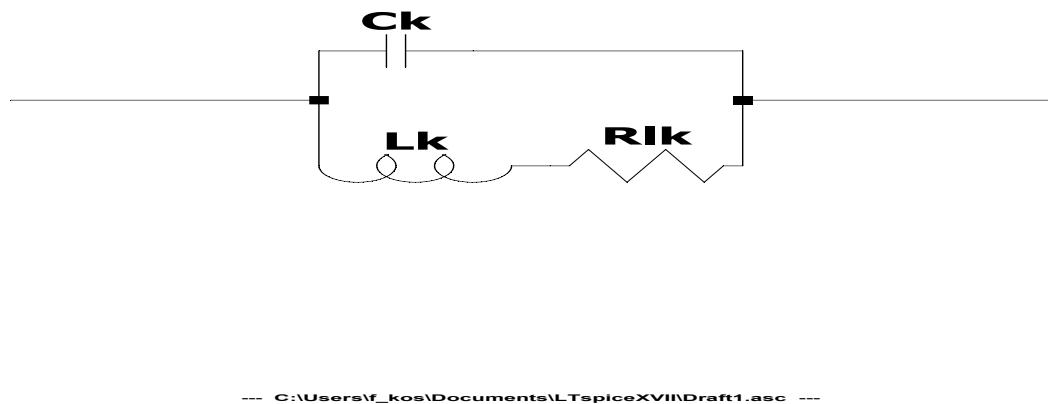
cije i dobijemo:

$$Z(\omega_k') = Z_{max} = \frac{2(13 + 2\sigma_k^2 - 3\sigma_k^4)}{\omega_k \sigma_k C_k (16 + 9\sigma_k^2)} \xrightarrow{\sigma_k << 1} Z_{max} \simeq \frac{13}{8\omega_k \sigma_k C_k}. \quad (3.7)$$

Uvrstimo pretpostavku 2 u (3.1), onda uvrstimo (3.3) u taj izraz, onda uvrstimo (2.1c) u dobiveni izraz i na kraju izlučimo realni dio:

$$Z(\omega_k') = Z_{max} = \frac{3 - 2\sigma_k^2}{\omega_k \sigma_k C_k} \xrightarrow{\sigma_k << 1} Z_{max} \simeq \frac{3}{\omega_k \sigma_k C_k} \quad (3.8)$$

3.2. Otpor u seriju sa zavojnicom



Slika 3.2: Serijski otpor s induktivitetom R_{Lk}

$$Z(s) = \frac{sL_k + R_{Lk}}{s^2L_kC_k + sC_kR_{Lk} + 1} \quad (3.9)$$

$$Z(\omega) = \frac{j\omega L_k + R_{Lk}}{1 - \omega^2L_kC_k + j\omega C_kR_{Lk}}$$

Nule impedancije:

$$s_{0_1} = \frac{-R_{Lk}}{L_k}, s_{0_2} = \infty, \quad (3.10)$$

polovi impedancije:

$$s_{p_{1,2}} = \frac{-R_{Lk}}{2L_k} \pm j\sqrt{\frac{1}{C_kL_k} - \frac{R_{Lk}^2}{4L_k^2}}, \omega_k\sigma_k = \frac{R_{Lk}}{2L_k} \rightarrow R_{Lk} = \frac{2\sigma_k}{\omega_k C_k} \quad (3.11)$$

U rezonanciji ostane samo realni dio impedancije (3.9):

$$Z(\omega_k) = \frac{R_{Lk}}{\omega_k^4 C_k^2 L_k^2 + \omega_k^2 C_k^2 R_{Lk}^2 - 2\omega_k^2 C_k L_k + 1}. \quad (3.12)$$

3.2.1. Pretpostavka: $\omega_k'^2 = \omega_k^2 (1 - \sigma_k^2) \xrightarrow{\sigma_k << 1} \omega_k' \simeq \omega_k$

Kada uvrstimo relaciju (2.1c) u (3.12):

$$Z(\omega_k') \simeq Z(\omega_k) = \frac{1}{\omega_k^2 C_k^2 R_{Lk}}, \quad (3.13)$$

i (3.11) u (3.12):

$$Z(\omega_k) = Z_{max} = \frac{1}{2\omega_k C_k \sigma_k} \quad (3.14)$$

3.2.2. Pretpostavka 2: $\omega_k' = \omega_k + j\omega_k\sigma_k$

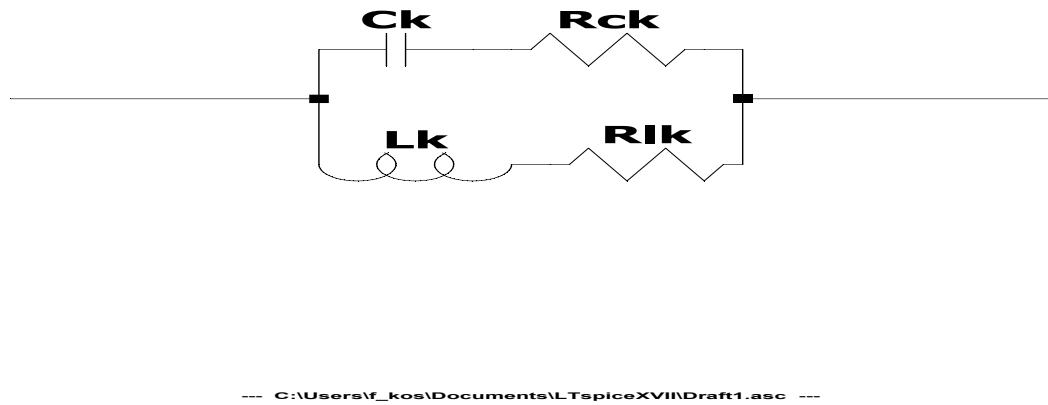
Uvrstimo prepostavku 2, (2.1c) i (3.11) u (3.12):

$$Z(\omega_k') = Z_{max} = -\frac{6}{\omega_k\sigma_k C_k (16 + 9\sigma_k^2)} \xrightarrow{\sigma_k \ll 1} Z_{max} \simeq \frac{3}{8\omega_k\sigma_k C_k}, \quad (3.15)$$

Uvrstimo prepostavku 2 u (3.9), onda u dobiveni izraz uvrstimo (3.11). U onda dobiveni izraz uvrstimo (2.1c) te onda izlučimo realni dio impedancije:

$$Z(\omega_k') = Z_{max} = -\frac{1}{\omega_k\sigma_k C_k} \quad (3.16)$$

3.3. Otpor u seriju sa zavojnicom i s kondenzatorom



Slika 3.3: Serijski otpor s induktivitetom R_{Lk} i s kondenzatorom R_{Ck}

$$Z(s) = \frac{s^2 C_k L_k R_{Ck} + s(L_k + C_k R_{Lk} R_{Ck}) + R_{Lk}}{s^2 L_k C_k + s(C_k R_{Lk} + C_k R_{Ck}) + 1} \quad (3.17a)$$

$$= \frac{R_{Lk} (1 + s C_k R_{Ck}) \left(1 + s \frac{L_k}{R_{Lk}}\right)}{s^2 L_k C_k + s(C_k R_{Lk} + C_k R_{Ck}) + 1} \quad (3.17b)$$

$$Z(\omega) = \frac{R_{Lk} - \omega^2 C_k L_k R_{Ck} + j\omega(L_k + C_k R_{Lk} R_{Ck})}{1 - \omega^2 L_k C_k + j\omega C_k (R_{Lk} + R_{Ck})} \quad (3.17c)$$

Nule impedancije:

$$s_{0_1} = \frac{-R_{Lk}}{L_k}, s_{0_2} = \frac{-1}{C_k R_{Ck}}, s_{0_3} = \infty \quad (3.18)$$

polovi impedancije:

$$s_{p_{1,2}} = \frac{-(R_{Ck} + R_{Lk})}{2L_k} \pm j \sqrt{\underbrace{\frac{1}{C_k L_k} - \frac{(R_{Lk} + R_{Ck})^2}{4L_k^2}}_{=\omega_k^2 - (\omega_k \sigma_k)^2 = \omega_k^2(1 - \sigma_k^2)}}, \omega_k \sigma_k = \frac{R_{Ck} + R_{Lk}}{2L_k} \quad (3.19)$$

uvrštavanjem (2.1c) u (3.19) dobijemo izraz za :

$$\sigma_k = \frac{R_{Lk} + R_{Ck}}{2} \sqrt{\frac{C_k}{L_k}} \quad (3.20)$$

Tako da možemo zapisati polove kao:

$$s_{p_{1,2}} = -\omega_k \sigma_k \pm j\omega_k \sqrt{1 - \sigma_k^2} \xrightarrow{\sigma_k \ll 1} s_{p_{1,2}} = \omega_k \sigma_k \pm j\omega_k$$

$$\omega_{k_{1,2}}' = \pm\omega_k + j\omega_k \sigma_k$$
(3.21)

Na rezonantnoj frekvenciji sklopa 3.3 ponište se imaginarni djelovi impedancije i ostane samo realni dio:

$$Z(\omega_k) = \frac{R_{Lk} + C_k^2 L_k^2 R_{Ck} \omega_k^4 + C_k^2 R_{Ck}^2 R_{Lk} \omega_k^2 + C_k^2 R_{Ck} R_{Lk}^2 \omega_k^2}{C_k^2 L_k^2 \omega_k^4 + C_k^2 R_{Ck}^2 \omega_k^2 + 2C_k^2 R_{Ck} R_{Lk} \omega_k^2 + C_k^2 R_{Lk}^2 \omega_k^2 - 2C_k L_k \omega_k^2 + 1}$$
(3.22)

3.3.1. Pretpostavka: $\omega_k'^2 = \omega_k^2 (1 - \sigma_k^2) \xrightarrow{\sigma_k \ll 1} \omega_k' \simeq \omega_k$

Prepostavimo da (3.3) i (3.11) na isti način "krvare" Q faktor tako da možemo pretpostaviti da su $R_{Ck} = R_{Lk} = R_p$

$$\sigma_k = R_p \sqrt{\frac{C_k}{L_k}} \rightarrow R_p = \frac{\sigma_k}{\omega_k C_k},$$
(3.23)

stoga uvrstimo (2.1c) i (3.23) u (3.22):

$$Z(\omega_k) = Z_{max} = \frac{1 + \sigma_k^2}{2\omega_k \sigma_k C_k} \xrightarrow{\sigma_k \ll 1} Z_{max} \simeq \frac{1}{2\omega_k \sigma_k C_k}$$
(3.24)

3.3.2. Pretpostavka 2: $\omega_k' = \omega_k + j\omega_k \sigma_k$

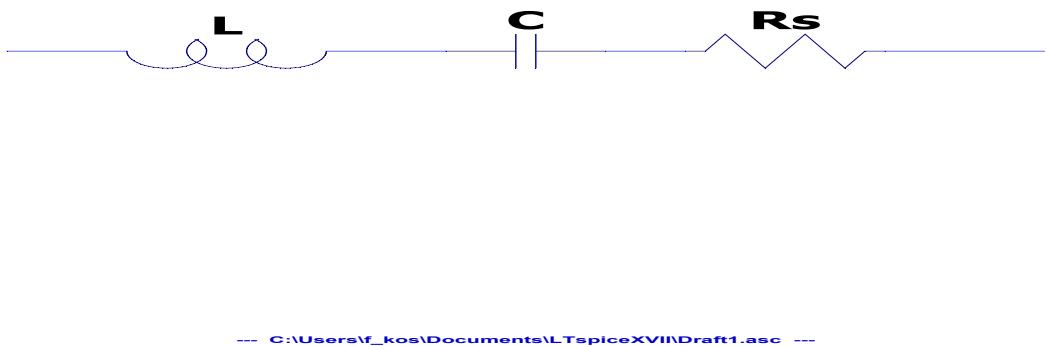
Uvrstimo pretpostavku 2, (2.1c) i (3.23) u (3.22) onda uzmemmo realni dio te impedancije i u nju uvrstimo i dobijemo:

$$Z(\omega_k') = Z_{max} = \frac{3\sigma_k^4 + 12\sigma_k^2 + 10}{\omega_k \sigma_k C_k (9\sigma_k^2 + 16)} \xrightarrow{\sigma_k \ll 1} Z_{max} \simeq \frac{5}{8\omega_k \sigma_k C_k}$$
(3.25)

Uvrstimo pretpostavku 2 u (3.17c), onda u dobiveni izraz uvrstimo (3.23). U dobiveni izraz uvrstimo (2.1c) i izlučimo realni dio dobivene impedancije:

$$Z(\omega_k') = Z_{max} = \frac{1}{\omega_k \sigma_k C_k}$$
(3.26)

4. Kako serijski otpor utječe na polove rezonantnih (serijskih) LC krugova



Slika 4.1: Serijski rezonantni LC krug sa serijskim R_s otpornikom

Impedancija je:

$$Z(s) = \frac{s^2LC + sCR_s + 1}{sC}$$

$$Z(\omega) = \frac{1 - \omega^2LC + j\omega CR_s}{j\omega C} \quad (4.1)$$

polovi:

$$s_{p_1} = 0, \quad (4.2)$$

nule:

$$s_{0_{1,2}} = -\frac{R_s}{2L} \pm j \sqrt{\underbrace{\frac{1}{LC} - \frac{R_s^2}{L^2}}_{=\omega_k^2 - \omega_k^2 \sigma_k^2 = \omega_k^2 (1 - \sigma_k^2)}} \rightarrow \sigma_k = \frac{R_s}{2} \sqrt{\frac{L}{C}} \rightarrow R_s = 2\sigma_k \sqrt{\frac{C_k}{L_k}}, \quad (4.3)$$

"Nova" rezonantna frekvencija koja je pokvarena zbog serijskog otpora je $\omega_k' = \omega_k^2 (1 - \sigma_k^2) \simeq \omega_k$ što ako pogledamo (2.3) je θ_l tj. nula impedancije. Tako da možemo zapisati nule kao:

$$\begin{aligned} s_{0_{1,2}} &= -\omega_k \sigma_k \pm j\omega_k \sqrt{1 - \sigma_k^2} \xrightarrow{\sigma_k \ll 1} s_{0_{1,2}} = \omega_k \sigma_k \pm j\omega_k \\ \theta_{k_{1,2}} &= \pm\omega_k + j\omega_k \sigma_k \end{aligned} \quad (4.4)$$

4.0.1. Pretpostavka: $\omega_k'^2 = \omega_k^2 (1 - \sigma_k^2) \xrightarrow{\sigma_k \ll 1} \omega_k' \simeq \omega_k$

Na rezonantnoj frekvenciji imaginarni dio impedancije postaje nula:

$$\begin{aligned} Z(\omega_k') &\simeq Z(\omega_k) = \frac{1 - \omega_k^2 LC + j\omega_k CR_s}{j\omega_k C} \\ &= \frac{\omega_k^2 C^2 R_s + j(\omega_k^3 LC^2 - \omega_k C)}{\omega_k^2 C^2} \\ &\xrightarrow{Im(Z(\omega_k))=0} Z(\omega_k) = Z_{min} = \frac{\omega_k^2 C^2 R_s}{\omega_k^2 C^2} = R_s = 2\sigma_k \sqrt{\frac{L_k}{C_k}} = \frac{2\sigma_k}{\omega_k C_k} \end{aligned} \quad (4.5)$$

4.0.2. Pretpostavka 2: $\omega_k' = \omega_k + j\omega_k \sigma_k$

Ako uvrstimo pretpostavku 2 u (4.1), te onda uvrstimo u taj izraz (2.1c) i onda izlučimo realni dio impedancije:

$$Z(\omega_k') = Z_{min} = \frac{\sigma_k^3}{\omega_k C_k (\sigma_k^2 + 1)} \xrightarrow{\sigma_k \ll 1} Z_{min} \simeq 0. \quad (4.6)$$

5. Algoritam izlučivanja nadomjesnog modela kondenzatora iz mjerena

5.1. Izračun gubitaka σ_m iz s parametara

Iz (2.10) možemo izvesti sljedeću formulu za anti-rezonantni LC krug:

$$\sigma_m = \frac{1}{2\omega_m^3 C_m |Z(\omega_m)|} = \frac{|s_{21}(\omega_m)|}{4\omega_m^3 C_m Z_0 (1 - |s_{21}(\omega_m)|)}. \quad (5.1)$$

Iz formule (2.17) možemo izvesti sljedeću formulu za rezonantni LC krug:

$$\sigma_m = \frac{|Z(\omega_m)| \omega_m C_m}{2} = \frac{\omega_m C_m Z_0 (1 - |s_{21}(\omega_m)|)}{|s_{21}(\omega_m)|} \quad (5.2)$$

5.2. Algoritam

Algoritam za izlučivanje nadomjestnog anti-rezonantnog modela kondenzatora iz mjerena

- (i) Zapisati frekvencije polova i njihove $|s_{21}(\omega)|$ te izračunati gubitke σ_m iz (5.1)
- (ii) Zapisati frekvencije nula i njihove $|s_{21}(\omega)|$
- (iii) Izračunati C_m i L_m anti-rezonantnih LC krugova pomoću (2.8a)
- (iv) Iz izračunatih gubitaka izračunati ekvivalentni serijski otpor pomoću jednih od formula iz 3. poglavlja (treba vidjeti koji je najtočniji model i koja je najtočnija aproksimacija)

Algoritam za izlučivanje nadomjestnog rezonantnog modela kondenzatora iz mjerena

- (i) Zapisati frekvencije polova i njihove $|s_{21}(\omega)|$
- (ii) Zapisati frekvencije nula i njihove $|s_{21}(\omega)|$ te izračunati gubitke σ_m iz (5.2)

- (iii) Izračunati C_m i L_m anti-rezonantnih LC krugova pomoću (2.14)
- (iv) Iz izračunatih gubitaka izračunati ekvivalentni serijski otpor pomoću jednih od formula iz 4. poglavlja (treba vidjet koja je najtočnija aproksimacija).

6. Zaključak

Zaključak.

7. Literatura

- [1] R. M. Foster. A reactance theorem. *The Bell System Technical Journal*, 3(2):259–267, April 1924. ISSN 0005-8580. doi: 10.1002/j.1538-7305.1924.tb01358.x.

8. Sažetak

Sažetak.